CHAPITRE V

CARTES GEOGRAPHIQUES (SUITE)

Projections sur un plan tangent.

115. Projection gnomonique (polaire centrale, orthodromique).

1°. — Projetons sur un plan tangent au pôle; le point de vue V est sur la ligne des pôles, à la distance $\overline{OV}=D$, du centre de la sphère.

Sur la carte repérons les points au moyen des coordonnées polaires; r désigne le rayon vecteur, α l'angle avec une droite de référence. L'origine des coordonnées est au point de tangence.

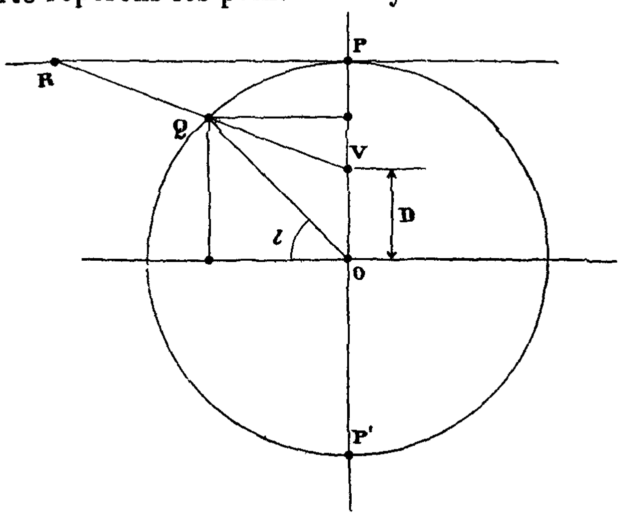


Fig. 97.

Les coordonnées du point R, image du point Q de la sphère, sont :

$$\alpha=L, \qquad r=\frac{(1-D)\cos l}{\sin l-D}.$$

2°. — Etudions d'abord le cas où le point de vue se confond avec le centre de la sphère :

$$D=0, \qquad \alpha=L, \qquad r=\operatorname{cotg} l.$$

L'intérêt de cette projection est que les grands cercles de la sphère sont représentés par des droites.

Un grand cercle défini par son inclinaison i sur l'équateur et la longitude L_0 de la ligne d'intersection (ligne des nœuds), a pour équation :

$$\operatorname{tg} l = \sin(L - L_0) . \operatorname{tg} i, \qquad \frac{1}{r} = \sin(\alpha - L_0) . \operatorname{tg} i.$$

Développons, passons aux coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{cotg} i = y \cos L_0 - x \sin L_0,$$

qui est l'équation de la droite cherchée, évidemment parallèle à la ligne des nœuds et située à une distance cotg i de l'image du pôle.

Pour les méridiens, on a : $y : x = \operatorname{tg} L_0$.

3°. — PROJECTION HORIZONTALE.

La Terre étant supposée sphérique, on peut mettre le pôle en un point quelconque de la surface; la projection conserve la même propriété fondamentale (*les grands cercles sont représentés par des droites*). Mais les parallèles sont, non plus des circonférences concentriques, mais des sections coniques.

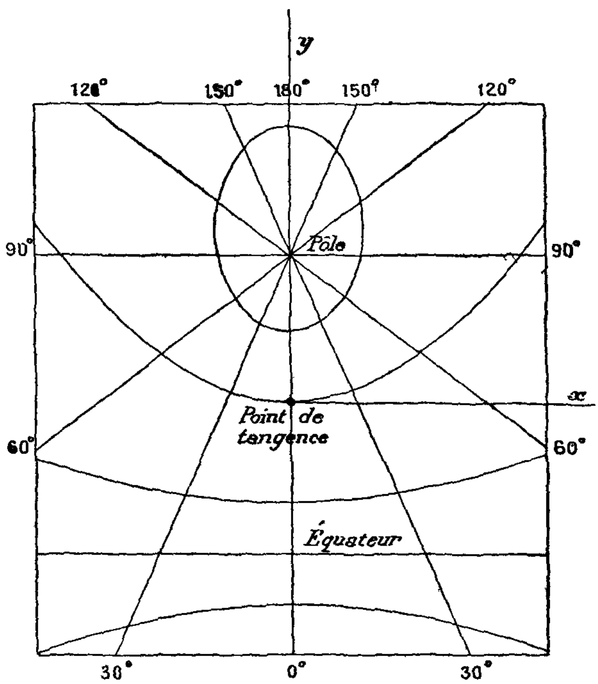


Fig. 98.

Il est alors plus simple d'utiliser les coordonnées cartésiennes. Soit l_0 la latitude du point de tangence; nous prendrons son méridien pour méridien principal. L'axe des y sera sa projection. L'axe des x sera donc la projection du premier vertical. On trouve aisément :

$$y = \frac{-\sin l_0 . \cos l . \cos L + \cos l_0 . \sin l}{\cos l_0 . \cos l . \cos L + \sin l_0 . \sin l},$$

$$x = \frac{\cos l . \sin L}{\cos l_0 . \cos l . \cos L + \sin l_0 . \sin l}.$$

Faisons $L = 0$, il vient :

$$x = 0, \qquad y = \operatorname{tg}(l - l_0).$$

Pour le pôle, on a : $\quad l = \pi : 2, \quad y = \operatorname{cotg} l_0,$

L'équation des méridiens s'obtient en éliminant l entre les équations (1) :

$$x \cos L + y \sin l_0 . \sin L = \cos l_0 . \sin L.$$

Ce sont des droites qui passent toutes par le pôle :

$$x = 0, \qquad y = \operatorname{cotg} l_0.$$

Leur inclinaison θ sur le méridien principal est donnée par la formule :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{y} = \sin l_0 . \operatorname{tg} L.$$

L'équation des parallèles s'obtient en éliminant L entre les équations (1) :

$$x^2 \sin^2 l + y^2 (\sin^2 l - \cos^2 l_0) - y \sin 2 l_0 = \cos^2 l - \cos^2 l_0.$$

Ce sont des ellipses pour les parallèles compris entre le point de tangence et le pôle ($l > l_0$).

C'est une parabole pour le parallèle qui passe par le point de tangence.

Ce sont des hyperboles pour les parallèles qui sont entre le point de tangence et l'équateur.

4°. — Si le point de tangence vient sur l'équateur, les équations se simplifient :

$$x = \operatorname{tg} L, \qquad y = \operatorname{tg} l : \cos L,$$

Les méridiens sont les droites parallèles $x = \operatorname{tg} L$; ce qui revient à dire que l'image du pôle passe à l'infini.

Les parallèles sont les hyperboles :

$$-x^2 + y^2 \operatorname{cotg}^2 l = 1.$$

116. Projection orthographique polaire.

1°. — Le point de vue est à l'infini : les lignes de visée sont parallèles à la ligne des pôles :

$$D = \infty, \qquad \alpha = L, \qquad r = \cos l.$$

Il peut sembler bizarre d'étudier tant de projections correctes seulement au voisinage du pôle ; le lecteur voudra bien se reporter a ce que nous disons au § 98 des *projections zénithales*.

Projeter sur un plan tangent en un point quelconque de la sphère est le même problème que projeter sur le plan tangent au pôle. Il suffit de calculer les distances à l'horizon et les azimuts des lieux en fonction de leur latitude et de leur longitude, pour faire du zénith du point de tangence l'équivalent du pôle.

2°. — Si le plan de projection est parallèle à l'horizon du point de coordonnées :

$$L = 0, \qquad l = l_0,$$

les coordonnées cartésiennes de l'image du point l, L, sont :

$$x = \cos l . \sin L, \qquad y = \sin l . \cos l_0 - \sin l_0 . \cos l . \cos L. \tag{1}$$

Pour $L = 0$, on a :

$$x = 0, \qquad y = \sin (l - l_0).$$

Les coordonnées du pôle sont donc :

$$x=0, \qquad y=\cos l_0.$$

Pour trouver l'équation des méridiens, éliminons l entre les équations (1) :

$$x^2(1-\sin^2 l_0.\sin^2 L)+xy\sin l_0.\sin 2L+y^2\sin^2 L=\sin^2 L.\cos^2 l_0.$$

Ce sont des ellipses qui évidemment passent toutes par le pôle. Les grands axes valent 1 ; les petits valent $\cos l_0.\sin L$.

L'angle ω du grand axe avec le méridien principal est :

$$\operatorname{tg}\omega=\sin l_0.\operatorname{tg} L.$$

L'équation des parallèles s'obtient en éliminant L entre les équations (1):

$$y^2-2y\sin l.\cos l_0+x^2\sin^2 l_0=\sin^2 l_0.\cos^2 l-\sin^2 l.\cos^2 l_0.$$

Les grands axes valent $\cos l_0$ et sont dirigés normalement au méridien principal; les petits axes valent $\cos l.\sin l_0$ et sont dirigés suivant ce méridien.

L'équateur a pour image l'ellipse :

$$y^2+x^2\sin^2 l_0=\sin^2 l_0.$$

117. Projection stéréographique polaire (conforme).

On met le point de vue en P' (fig. 97); on projette sur le plan tangent au point P.

Cela revient à poser $D=-1$, dans les formules du § 115 :

$$\alpha=L, \qquad r=\frac{2\cos l}{1+\sin l}=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right).$$

Pour trouver les propriétés de cette projection, repassons aux coordonnées cartésiennes. On a :

$$x=r\cos\theta=2\cos L.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right), \quad y=r\sin\theta=2\sin L.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right).$$

Calculons E, F, G (§ 98).

On a : $$F=0, \quad E=G=4\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right).$$

Donc la transformation est conforme : les angles sont conservés; une figure infiniment petite est transformée en une figure semblable. Le facteur de transformation est :

$$\tau=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right) : \cos l=1 : \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{l}{2}\right).$$

Pour $l=90°$, il est égal à l'unité; ce qui est évident.

Non seulement alors les figures infiniment petites sont semblables, mais elles sont projetées en vraie grandeur.

2°. — Cherchons ce que devient un cercle de rayon fini tracé sur la sphère.

Nous ne particularisons pas le problème en mettant le centre du cercle sur le méridien origine; l'équation est donc (§ 111) :

$$\sin l.\sin l_0 + \cos l.\cos l_0.\cos L = \cos \rho ; \qquad (1)$$

ρ est le rayon du cercle, l_0 est la latitude du centre; l et L sont les coordonnées courantes d'un point du cercle.

Cherchons la valeur de r par rapport à l. On trouve :

$$\cos l = \frac{4r}{4+r^2}, \qquad \sin l = \frac{4-r^2}{4+r^2}.$$

Substituons dans l'équation (1); nous trouvons :

$$R^2 = A^2 + r^2 - 2rA\cos\alpha, \qquad (2)$$

en posant : $$A = \frac{2\cos l_0}{\cos\rho + \sin l_0}, \qquad R = \frac{2\sqrt{\sin^2 l_0 - \cos^2\rho}}{\cos\rho + \sin l_0}.$$

L'équation (2) représente un cercle de rayon R, dont le centre est à la distance A de l'origine sur la droite à partir de laquelle les angles α sont comptés.

Nous appliquerons plus loin ce théorème (§ 119) qui exprime la propriété fondamentale de la projection stéréographique : *les images des cercles tracés sur la sphère sont des cercles.* Il est clair qu'elle subsiste que le diamètre PP′ soit ou non la ligne des pôles.

118. Projection zénithale équidistante (Guillaume Postel).

1°. — Parmi les projections qui satisfont aux équations générales :

$$\alpha = L, \qquad r = r(l),$$

la plus simple consiste à poser :

$$\alpha = L, \qquad r = 90° - l.$$

Elle est due à Guillaume Postel (1581).

Etendue à moins de 30° du centre de la projection (ici le pôle), elle produit des déformations acceptables.

La circonférence du parallèle l, qui est effectivement :

$$2\pi\cos l, \quad \text{devient} \quad \pi(\pi - 2l).$$

Pour $l = 60°$ la vraie longueur est π; la longueur sur la carte est :

$$l = 60° = 1{,}047, \qquad \pi(\pi - 2\,l) = 1{,}047.\pi.$$

L'erreur est de 5 p. 100.

2°. — Si le point central de la carte n'est pas au pôle, on calcule l'azimut A et la distance zénithale Z du point de coordonnées l, L; après quoi on applique la construction (§ 98).

Soit l_0 la latitude du point central. Le lecteur vérifiera qu'on a :

$$\cos Z = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin l_0, \qquad \sin A = \frac{\sin L}{\sin Z}\cos l;$$

l'angle auxiliaire φ est donné par la relation :

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \cos L.\mathrm{cotg}\, l_0.$$

Dans le cas où le point est pris sur l'équateur (fig. 101), on a :

$$l_0 = 0, \qquad \varphi = \pi : 2;$$

$$\cos Z = \cos l . \cos L, \qquad \operatorname{tg} A = \sin L . \operatorname{cotg} l.$$

Projections coniques.

119. Projection de Gauss (conforme).

1°. — Posons : $\alpha = kL, \qquad r = r(l).$

Cherchons la condition pour que les angles soient conservés. Revenons aux coordonnées cartésiennes :

$$x = r . \cos kL, \qquad y = r . \sin kL.$$

On trouve aisément (§ 98) :

$$E = k^2 r^2, \qquad G = \left(\frac{dr}{dl}\right)^2 \cos^2 l, \qquad F = 0.$$

La condition cherchée est :

$$E = G, \qquad \frac{dr}{r} = \pm k \frac{dl}{\cos l}. \tag{1}$$

D'où les solutions :

$$r = r_0 \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{l}{2}\right)\right]^k = r_0 \left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)^k, \quad \text{en posant } l + z = \pi : 2.$$

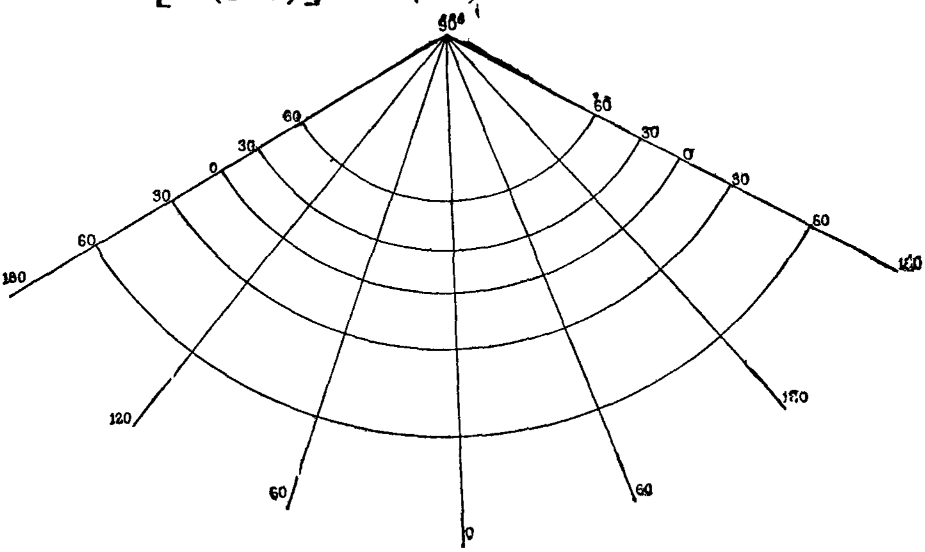


Fig. 99.

Choisir k, c'est choisir l'angle du secteur dans lequel on effectue le développement; il reste une arbitraire r_0.

La condition de conservation des aires est (§ 99) :

$$krdr = \cos l . dl;$$

en vertu de (1), elle devient : $\qquad k r = \cos l.$

On peut donc rendre la représentation *exacte* sur un parallèle.
Pour avoir l'exactitude sur l'équateur, on écrira :

$$l=0, \qquad r=r_0, \qquad kr_0=1.$$

On peut encore déterminer les constantes r_0 et k en écrivant que les parallèles de latitudes l_0 et l_1 ont des longueurs exactes :

$$r(l_0)=\cos l_0, \qquad r(l_1)=\cos l_1.$$

2°. — RETOUR A LA PROJECTION DE MERCATOR.

Nous pouvons écrire :

$$\log\frac{r}{r_0}=k\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{l}{2}\right).$$

Faisons k très petit. Remplaçons r par $r+r_0$.

On a : $$\log\left(1+\frac{r}{r_0}\right)=\frac{r}{r_0},$$

puisque par hypothèse r reste très petit.

D'où : $$r=r_0 k\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{l}{2}\right).$$

Mais, dans ces conditions, les droites concourantes images des méridiennes deviennent des droites parallèles, puisque, pour avoir une carte de dimensions finies, il faut renvoyer très loin leur point de concours. De même les cercles concentriques sont des droites parallèles dans leurs parties utilisées. Bref nous retombons sur la projection de Mercator, qui est un cas particulier de celle de Gauss.

120. Projections d'Alberts et de Lorgna (aires conservées).

1°. — PROJECTION D'ALBERTS.

Posons : $$\alpha=kL, \qquad r=r(l).$$

La condition pour que les aires se conservent est (§ 99) :

$$krdr=\cos l.dl, \qquad r=\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{I-\sin l}.$$

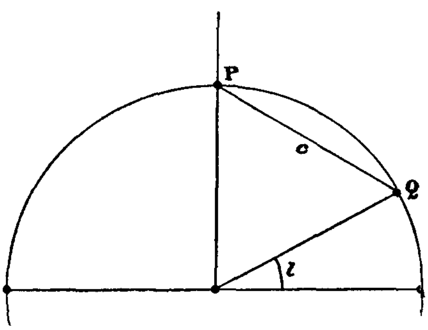


Fig 100.

I est la constante d'intégration.

2°. — PROJECTION DE LORGNA.

C'est un cas particulier de la précédente.

Déterminons la constante I de manière que pour le pôle ($l=90°$) le rayon vecteur soit nul. On a :

$$r=\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{1-\sin l}=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{2(1-\sin l)};$$

$\sqrt{2(1-\sin l)}$ est la corde c de l'arc de grand cercle compris entre le pôle et le parallèle de latitude l

Ce cas particulier de la méthode de Lambert revient donc à poser :

$$\alpha=kL, \qquad r=c:\sqrt{k},$$

On a : $G = \frac{\cos^4 l}{k^2 r^2}$, $E = k^2 r^2$.

La condition E=G, revient à poser :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{l}{2}\right) = \sqrt{k}.$$

Pour le parallèle déterminé par cette équation, la transformation est conforme. On choisit k de manière que le parallèle moyen de la portion de sphère à représenter satisfasse à la condition précédente.

Par exemple pour $l = 48°$, $k = \cos^2 21° = 0{,}876$.

Si au lieu de la latitude l, on prend son complément z, les formules ont l'expression plus simple :

$$\alpha = kL, \qquad r = \frac{2}{\sqrt{k}} \sin\frac{z}{2}.$$

3°. — La projection de Lorgna est excellente comme *projection zénithale*.

On prend pour pôle le zénith d'un point Q voisin du centre de la carte; les plans verticaux ont pour images des droites concourantes, les *almicantarats* (cercles parallèles à l'horizon du point Q) ont pour images des circonférences concentriques. Pour construire la carte, on calcule les coordonnées zénithales des points P formant le canevas, en fonction de leurs coordonnées géographiques.

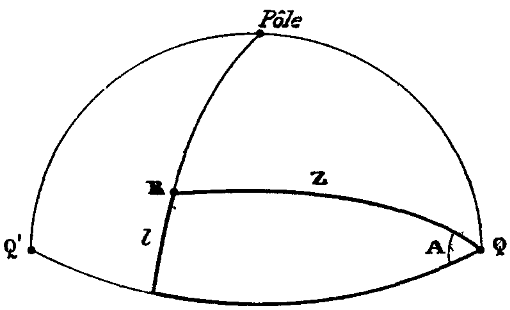


Fig. 101.

Il va de soi que les méridiens et les parallèles n'ont plus respectivement pour images des droites et des cercles (§ 98).

Si le centre de projection est sur l'équateur, on a (fig. 101) :

$$\cos Z = \cos l.\cos L, \qquad \operatorname{tg} A = \sin L.\operatorname{cotg} l.$$

Les équations des parallèles et méridiens sont :

$$\sin l = \sin Z.\sin A, \qquad \operatorname{tg} L = \operatorname{tg} Z.\cos A.$$

121. Projection sur un cône tangent à la sphère et développement.

Le point de vue peut être quelconque sur la ligne des pôles; pour ne pas faire une algèbre inutile, nous le mettons au centre.

Le cône est supposé tangent le long du parallèle l_0.

On a : $\overline{CA} = \operatorname{cotg} l_0$, $\overline{RA} = \operatorname{tg}(l - l_0)$;

d'où : $r = \overline{CR} = \operatorname{cotg} l_0 - \operatorname{tg}(l - l_0)$.

La longueur du parallèle tangent est :

$$2\pi\,\overline{AB} = 2\pi \cos l_0.$$

Après développement, il forme un arc de longueur $2\pi \cos l_0$, sur une circonférence de rayon $\overline{CA} = \operatorname{cotg} l_0$.

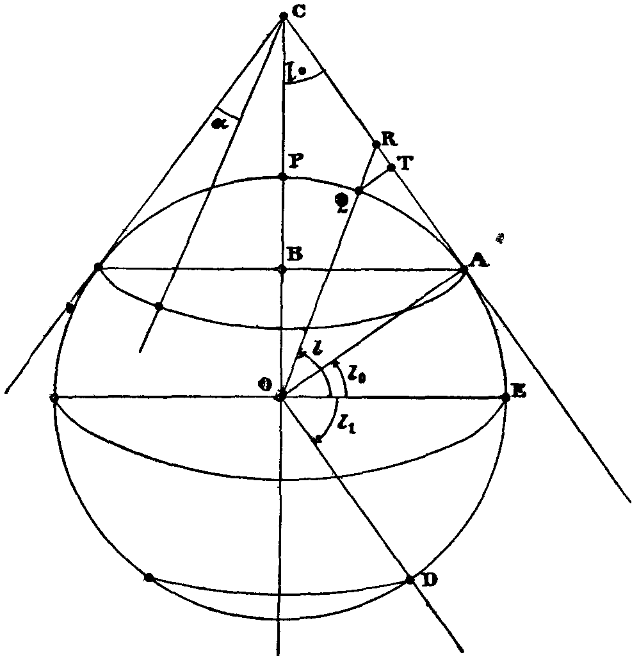


Fig. 102.

L'angle du secteur sur lequel la carte est construite, est donc :

$$\omega = 2\pi \cos l_0 : \operatorname{cotg} l_0 = 2\pi \sin l_0.$$

L'angle au sommet α est lié à la longitude L par la relation :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{2\pi \sin l_0}{2}, \qquad \alpha = L \sin l_0.$$

En définitive les coordonnées polaires sur la carte sont :

$$\alpha = L \sin l_0, \qquad r = \operatorname{cotg} l_0 - \operatorname{tg}(l - l_0).$$

On représente tous les points compris
entre le pôle P ($l = 90°$, $r = 0$)
et le parallèle de latitude négative $l_1 = l_0 - 90°$; $r = \infty$.

La carte est construite dans un angle d'amplitude $\omega = 2\pi \sin l_0$ bien déterminée; on choisit arbitrairement l'arc représentatif du parallèle de latitude l_0; il fixe l'échelle.

Son rayon est conventionnellement égal à

$$r_0 = \operatorname{cotg} l_0.$$

2°. — En faisant $l_0 = 0$, on retombe sur la projection cylindrique du § 105 :

$$x = L, \qquad y = \operatorname{tg} l.$$

Le sommet du cône passe à l'infini, l'angle ω dans lequel la carte est construite devient nul; les méridiennes ont donc pour images des droites parallèles; les images circulaires des parallèles se rectifient. On a :

$$x = \operatorname{cotg} l_0 - r = \operatorname{tg}(l - l_0);$$

$\operatorname{cotg} l_0$ et r deviennent séparément infinis, mais leur différence reste finie.

122. Autres systèmes de projection sur un cône tangent suivie de développement.

Ne conservons du système précédent que l'essentiel.

Les formules de transformation deviennent :

$$\alpha = L \cos l_0,$$
$$r = \operatorname{cotg} l_0 - f(l - l_0);$$

f est une fonction arbitraire.

Voici quelques hypothèses simples.

1°. — PROJECTION CONIQUE PURE.

On pose : $\alpha = L \cos l_0$.

$$r = \operatorname{cotg} l_0 - (l - l_0).$$

Ce système se confond avec le précédent pour de petites valeurs de $l - l_0$.

2°. — PROJECTION ORTHOGONALE.

Projetons le point Q orthogonalement sur le cône.

On a : $\overline{AT} = \sin(l - l_0)$.

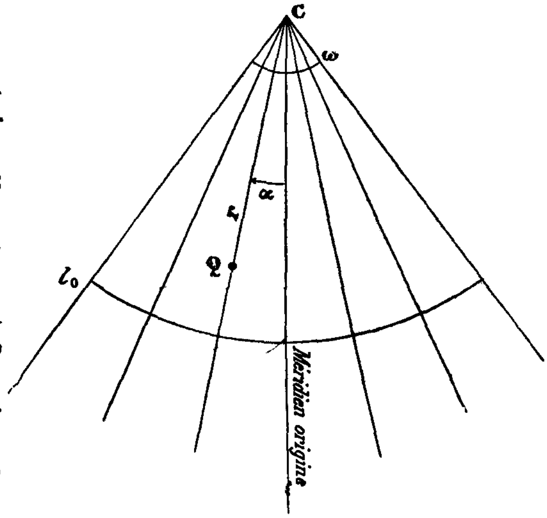


Fig. 103.

Les formules de transformation deviennent :

$$\alpha = L \cos l_0, \qquad r = \operatorname{cotg} l_0 - \sin(l - l_0).$$

123. Projection sur un cône sécant.

1°. — La carte est construite sur le cône de sommet C qui coupe la sphère suivant les parallèles l_1 et l_0.

Le demi-angle au sommet β du cône satisfait à la relation :

$$2\beta = l_0 + l_1.$$

Après le développement, la carte se trouve construite sur un secteur dont l'arc est $2\pi\overline{MN}$ et dont le rayon est $\overline{CM}$.

L'angle du développement est donc :

$$\omega = 2\pi \cos\beta : \operatorname{cotg}\beta = 2\pi \sin\beta.$$

L'angle α (fig. 103) est donc lié à la longitude par l'équation :

$$\alpha = L \sin \frac{l_1 + l_0}{2}. \qquad (1)$$

Cherchons la distance $\Delta = \overline{CO}$ du sommet du cône au centre de la sphère. On a :

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OV}} = \frac{\sin CVO}{\sin \beta}, \qquad \Delta = \cos \frac{l_1 - l_0}{2} : \sin \frac{l_1 + l_0}{2}.$$

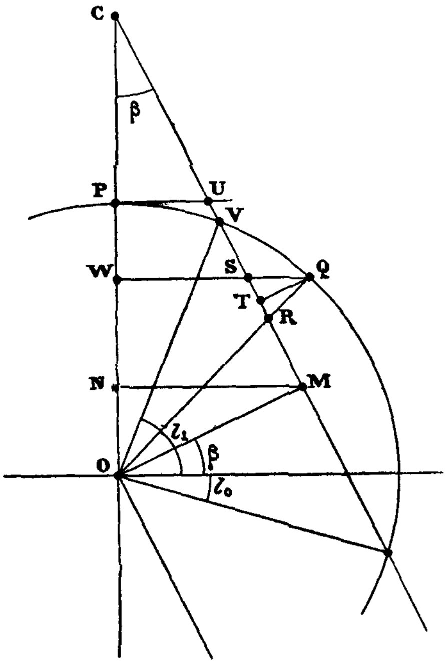


Fig. 104.

Reste à fixer la relation entre r et l.

On y parvient d'un grand nombre de manières.

2°. — Projection perpendiculaire a la ligne des pôles.

Le point Q de la sphère est reporté sur le cône suivant une droite perpendiculaire à la ligne des pôles; il vient en S.

On a :

$$\overline{CS} . \cos \beta = \overline{CW} = \Delta - \sin l,$$
$$r = (\Delta - \sin l) : \cos \beta. \qquad (2)$$

Le pôle est représenté par un cercle de rayon PU.

La carte est donc construite dans un angle ω bien déterminé; on prend arbitrairement le rayon r_1 de l'arc image du parallèle de latitude l_1. On fixe ainsi l'échelle du dessin.

On trace les images des autres parallèles à cette échelle.

La carte est limitée. Le rayon maximum s'obtient en posant

$$l = \pm 90°, \qquad r = \frac{\Delta \mp 1}{\cos \beta}.$$

3°. — Projection par perspective centrale.

On projette le point Q sur le cône en plaçant le point de vue au centre O de la sphère; Q vient en R.

Dans le triangle COR on a :

$$\frac{r}{\Delta} = \frac{\sin COR}{\sin CRO} = \frac{\cos l}{\cos (l - \beta)}, \qquad r = \frac{\Delta \cos l}{\cos (l - \beta)}. \qquad (2')$$

On peut généraliser en plaçant le point de vue sur la ligne des pôles à une distance D du centre. Mais cela n'a aucun intérêt pratique, l'avantage de cette projection étant de projeter en vraie grandeur les portions de la sphère à égale distance des parallèles l_0 et l_1 : le rayon OM rencontre alors normalement le cône.

La carte s'étend d'un côté jusqu'au sommet du cône ($l=90°$); elle s'étend de l'autre côté jusqu'à l'infini. Mais toute la sphère ne peut être représentée; le parallèle limite est tel qu'on ait :

$$l-\beta=-90°, \quad l=\beta-90°.$$

4°. — Projection normale au cône.

Le point Q peut être projeté en T suivant la normale QT à la surface du cône.

On a : $$r=\overline{\mathrm{CT}}=\overline{\mathrm{CM}}-\overline{\mathrm{TM}}=\Delta\cos\beta-\sin(l-\beta). \qquad (2'')$$

La carte est limitée entre les circonférences de rayons :

$$r=\Delta\cos\beta\mp\cos\beta.$$

Canevas de droites parallèles et de courbes diverses.

124. Projection de Sanson-Flamsteed (aires conservées).

1°. — Les parallèles sont représentés par des droites parallèles;

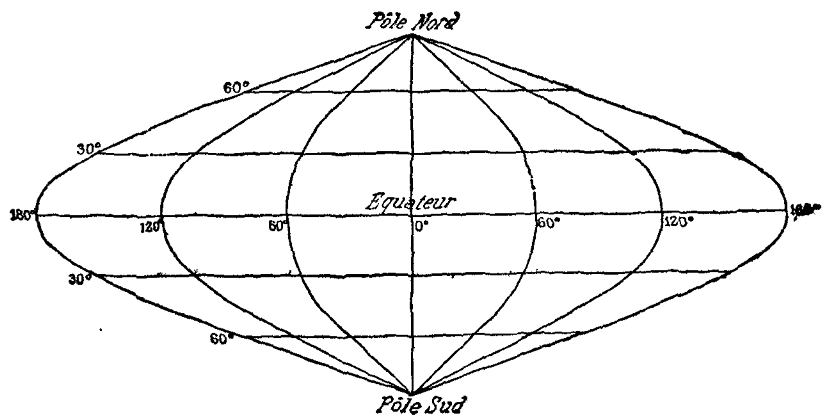


Fig. 105.

les méridiens sont des cosinusoïdes dont les amplitudes sont proportionnelles à la longitude : $x=\mathrm{L}\cos l, \quad y=l.$

Les aires sont conservées; on obtient du reste ces formules en écrivant $f(l)=l$, dans celles du § 99, 2°.

2°. — On généralise en posant :

$$x=\frac{\mathrm{L}\cos l}{k}, \qquad y=kl.$$

Les aires sont encore conservées. On a (§ 84) :

$$\mathrm{E}=\frac{\cos^2 l}{k^2}, \qquad \mathrm{G}=\left(k^2+\frac{\mathrm{L}^2\sin^2 l}{k^2}\right)\cos^2 l, \qquad \mathrm{F}=-\frac{\mathrm{L}\cos^2 l.\sin l}{k^2}.$$

Appliquons les formules du § 99; nous trouvons immédiatement :

$$\operatorname{tg}\Omega=\frac{1}{2}\sqrt{\left(k-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{\mathrm{L}^2\sin^2 l}{k^2}}.$$

Le minimum de Ω a lieu pour :

$$k^4 = 1 + L^2 \sin^2 l.$$

Si l'on veut que le minimum ait lieu au pôle ($l=90^\circ$) et sur les méridiens limites d'un hémisphère ($L = \pm\pi : 2$), on posera :

$$k^4 = 1 + \pi^2 : 4, \qquad k = 1{,}365.$$

125. Autres projections à aires conservées.

1°. — PROJECTION PRÉPETIT-FOUCAULT.

Appliquons les formules du § 101 :

$$y = f(l), \qquad x = L\cos l : f'(l).$$

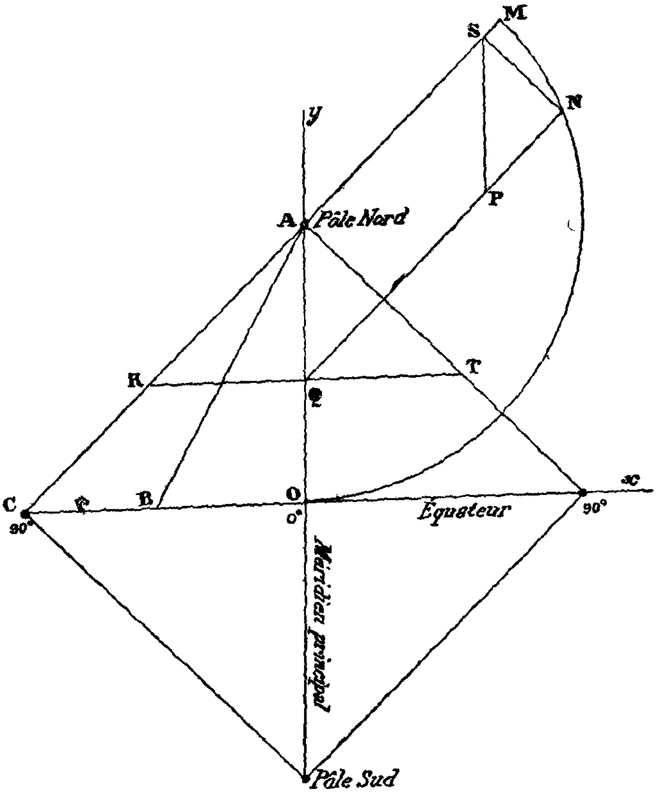


Fig. 106.

Posons : $\qquad y = \operatorname{tg}\frac{l}{2}, \qquad f'(l) = 1 : 2\cos^2\frac{l}{2},$

d'où : $$x = 2L\cos l.\cos^2\frac{l}{2}.$$

On généralise en posant :

$$y = k\operatorname{tg}\frac{l}{2}, \qquad x = \frac{2L}{k}\cos l.\cos^2\frac{l}{2}.$$

2°. — PROJECTION COLLIGNON.

Les parallèles sont représentés par des droites parallèles RQT; les méridiens le sont par des droites concourantes AB. On a :

$$x = b\mathrm{L}(a-y); \quad \text{d'où :} \quad b(a-y)\frac{dy}{dl} = \cos l.$$

y est déterminé par l'équation :

$$by\left(a-\frac{y}{2}\right) = \sin l,$$

pour avoir $y=0$ pour $l=0$.

Pour avoir $x=0$, c'est-à-dire $y=a$, pour $l=90°$, il faut poser $b=2:a^2$.

D'où : $\quad y(2a-y) = a^2 \sin l, \quad a^2 x = 2\mathrm{L}(a-y)$.

Ecrivons que la carte représentative d'un hémisphère est un *carré :* $\quad x = \pm a, \quad$ pour $\mathrm{L} = \pm \pi : 2; \quad a = \sqrt{\pi}$.

D'où : $\quad y^2 - 2y\sqrt{\pi} + \pi \sin l = 0, \quad \pi x = 2\mathrm{L}(\sqrt{\pi} - y)$.

$$y = \sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \sin l}\right).$$

Pour construire la droite QR image du parallèle de latitude l, décrivons le cercle ONM de centre A. Prenons :

$$2 \operatorname{arc} \overline{\mathrm{MN}} = 90 - l.$$

Nous définissons ainsi le point N; la droite NQ à 45° des axes donne le point Q cherché. On a en effet :

$$y = \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{SP}} = \sqrt{\pi}\left[1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{l}{2}\right)\right].$$

126. Projection d'Apianus-Cabot. Projection de Loritz.

1°. — D'une manière générale nous pouvons prendre :

$$x = x(l, \mathrm{L}), \quad y = l. \quad (1)$$

Apianus pose que les images des méridiennes sont des circonférences passant par les pôles. De plus l'image PIP′ du méridien de longitude L coupe l'image EE′ en un point I tel que $\overline{\mathrm{OI}} = \mathrm{L}$.

Le cercle image de longitude L a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2 - 4\mathrm{L}^2}{4\mathrm{L}}x = 0, \quad (2)$$

Le cercle qui limite la carte est de rayon $\pi : 2$.

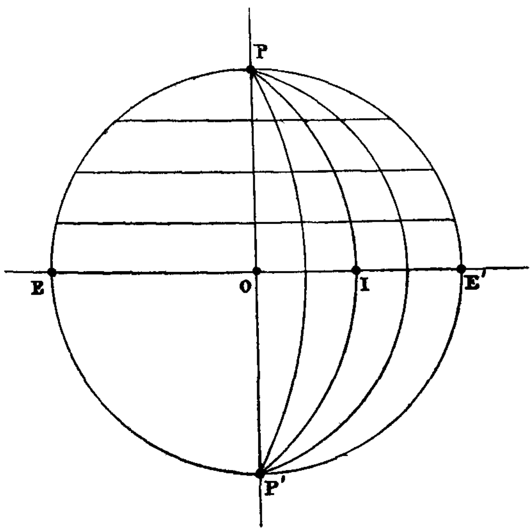


Fig. 107.

On trouvera la fonction $x=x\,(l,\ L)$, en substituant l à y dans l'équation (2) et en résolvant par rapport à x. Elle est compliquée et sans intérêt. Une remarque ici s'impose : ce sont les transformations analytiquement les plus compliquées qui se sont d'abord présentées, parce que leur tracé est simple; on s'est donné arbitrairement les images des méridiens et des parallèles sans se préoccuper des complications analytiques.

Elles proviennent ici de ce qu'une partie des courbes ne sert pas.

2°. — Projection de Loritz.

On prend pour images des méridiennes les cercles ci-dessus définis, et pour images des parallèles les droites :

$$y=\pi \sin l : 2.$$

L'écartement des parallèles est celui qu'on obtient dans la projection orthographique, quand le point de vue est dans l'équateur, à l'infini.

127. Projection orthographique sur un méridien.

On projette sur un plan parallèle a la ligne des pôles, en mettant le point de vue à l'infini, dans l'équateur, sur la normale au plan de projection. Le méridien principal est normal à ce plan.

On a : $$x=\cos L.\cos l, \qquad y=\sin l.$$

Les parallèles se projettent suivant des droites parallèles; les méridiennes ont pour images les ellipses :

$$\frac{x^2}{\cos^2 L}+y^2=1.$$

128. Projection de Mollweide-Babinet (aires conservées).

1°. — Cherchons à quelle condition la transformation :

$$x=\frac{4L}{\pi k}\cos\varphi, \qquad y=k\sin\varphi,$$

conserve les aires; φ est une fonction de la latitude l qu'il s'agit de déterminer.

La formule du § 99 donne la condition :

$$4\cos^2\varphi.\,d\varphi=\pi\cos l.\,dl, \qquad 2\varphi+\sin 2\varphi=\pi\sin l.$$

La solution de Mollweide-Babinet (*projection homalographique*) consiste à poser :

$$k=\sqrt{2}, \quad x=\frac{2\sqrt{2}L}{\pi}\cos\varphi, \qquad y=\sqrt{2}.\sin\varphi.$$

Les méridiennes sont représentées par les ellipses :

$$\frac{\pi^2 k^2}{16 L^2}x^2+\frac{y^2}{k^2}=1.$$

Pour $L=\pi:2$, l'ellipse devient :

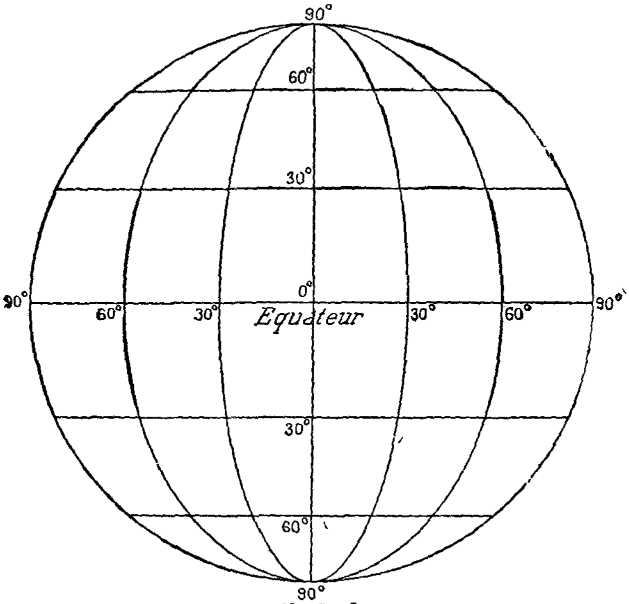
$$\frac{k^2}{4}x^2+\frac{y^2}{k^2}=1\,;$$

la carte est construite dans cette ellipse.

Appliquons au cas particulier de Babinet. Les méridiens sont les ellipses :

$$(k=\sqrt{2}), \qquad \frac{\pi^2}{8L^2}x^2+\frac{y^2}{2}=1. \qquad (1)$$

Pôle Nord



Pôle Sud

Fig. 108.

La carte est construite dans le cercle :

$$x^2+y^2=2, \qquad \text{de rayon } \sqrt{2}.$$

2°. — Projection du P. Fournier.

Conservons comme images des méridiennes les ellipses de Babinet. Comme images des parallèles prenons les droites :

$$y=\sqrt{2}\sin l,$$

de la projection orthographique sur un méridien.

En conservant les ellipses de Babinet, on conserve, non plus les aires d'une manière générale, mais les aires globales des fuseaux, aires comprises entre deux méridiens quelconques. La répartition de ces aires entre les divers parallèles n'est conservée que dans la projection de Babinet.

Pour avoir l'expression de x en fonction de l et de L, substituons la valeur de y dans l'équation (1) de l'ellipse; il vient :

$$x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}L\cos l.$$

3°. — Projection d'Arago.

Comme images des méridiennes conservons encore les ellipses de Babinet. Pour représenter les parallèles, prenons les droites :

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l,$$

des *cartes plates carrées* (§ 103).

Les aires globales des fuseaux sont conservées.

Substituant y dans l'équation (1) de l'ellipse, il vient pour expression de x :

$$x=\frac{2L}{\pi^2}\sqrt{2(\pi^2-4l^2)}.$$

Canevas de cercles concentriques et de courbes diverses.

129. Propriétés générales.

1°. — Les formules de transformation en coordonnées polaires sont de la forme : $\alpha=\alpha, (l, L), \quad r=r(l).$

Les cercles concentriques sont les images des *paralleles* de la sphère; les images des *méridiennes* sont des courbes *a priori* quelconques.

Une telle projection ne peut conserver les angles en tous les points de la carte, puisque les parallèles et les méridiennes sont des courbes orthogonales, tandis que leurs images ne se coupent plus partout à angles droits. Il faudrait pour cela que les images des méridiennes fussent des droites concourantes au centre des images des parallèles, ce qui par hypothèse n'est pas réalisé.

Pour que les aires soient conservées, il faut avoir (§ 99) :

$$\alpha=\varphi(l)+Lf(l).$$

La condition de conservation des aires est alors :

$$r^2=r_0^2+2\int_0^l\frac{\cos l}{f(l)}dl.$$

Nous pouvons choisir arbitrairement les fonctions φ et f de la latitude; dès lors, la fonction $r=r(l)$ est déterminée à une constante près.

2°. — Cherchons si la projection, particularisée comme il vient d'être dit, conserve les angles pour quelques points (ce que nous savons impossible pour tous).

D'une manière générale :

$$E=r^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial L}\right)^2, \quad G=\left[\left(\frac{dr}{dl}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial l}\right)^2\right]\cos^2 l,$$

$$F=r^2\frac{\partial\alpha}{\partial l}\frac{\partial\alpha}{\partial L}\cos l.$$

La première condition pour que les angles soient conservés, est :

$$F=0, \quad \partial a:\partial l=0.$$

Introduisons-la dans la condition $E = G$; il vient :

$$r\frac{\partial\alpha}{\partial L} = \pm\frac{dr}{dl}\cos l.$$

130. Cartes de l'état-major français; projection de Bonne (aires conservées).

1°. — Nous conservons les aires en posant :

$$\alpha = \frac{L\cos l}{a-l}, \qquad r = a - l; \qquad \alpha r = L\cos l.$$

Les angles sont conservés pour $\partial\alpha : \partial l = 0$, la seconde condition $E = G$ étant alors identiquement satisfaite; on trouve :

$$a = \operatorname{cotg} l_0 + l_0.$$

l_0 définit le *parallèle moyen.*

Les formules de transformation deviennent :

$$\alpha = L\frac{\cos l}{\operatorname{cotg} l_0 + (l_0 - l)}, \qquad r = \operatorname{cotg} l_0 + (l_0 - l).$$

On dit parfois que la *projection de Bonne* est la *projection de Flamsteed corrigée;* pour celle-ci on a (§ 124) *en coordonnées cartésiennes :*

$$x = L\cos l, \qquad y = l.$$

Evidemment les formules se ressemblent; mais la nécessité de l'assimilation (voire approchée) n'est pas impérieuse.

La longueur de l'image circulaire du parallèle de latitude l est égale au produit αr de l'amplitude de l'angle α pour une variation de L égale à 2π, par le rayon vecteur correspondant r :

$$L = 2\pi, \qquad \alpha = \frac{2\pi\cos l}{r}, \qquad \alpha r = 2\pi\cos l.$$

C'est précisément la longueur du parallèle : la projection de Bonne a donc pour propriété essentielle que *l'image circulaire d'un parallèle quelconque a la longueur même de ce parallèle.*

2°. — Etudions les courbes images des méridiennes.

Elles passent toutes par le point P qui est l'image du pôle de la sphère : pour $l = 90°$, on a $\alpha = 0$, quel que soit L.

Le rayon vecteur correspondant $\overline{OP}$ est :

$$r = \operatorname{cotg} l_0 + \left(l_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le pôle est donc sur un cercle de rayon fini.

L'angle que la tangente à une courbe exprimée en coordonnées polaires fait avec le rayon vecteur, est généralement donné par la formule :

$$\operatorname{tg} V = r\frac{d\alpha}{dr}.$$

Pour L constante, on trouve :

$$\operatorname{tg} V = L\left(\sin l - \frac{\cos l}{a - l}\right).$$

L'angle V devient nul pour :

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{d\alpha}{dl} = 0; \qquad \operatorname{cotg} l_0 = a - l_0.$$

C'est la condition qui définit le *parallèle moyen*. Les images des méridiennes coupent donc normalement l'image du parallèle moyen.

Pour $l = 90°$ (pôle), on a :

$$\operatorname{tg} V = L.$$

Mais alors α est toujours nul; l'angle V représente donc l'angle

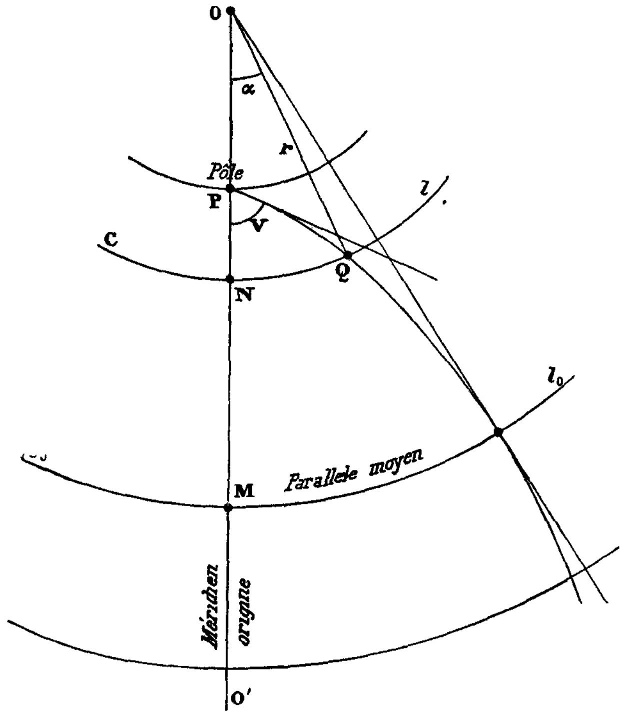


Fig. 109.

avec la droite OPN de la tangente de départ de l'image de la méridienne. Pour de petites longitudes, on a sensiblement $V = L$

Pour	$L = 45°$,	$V = 38° 9'$;
pour	$L = 90°$,	$V = 56°,31'$;
pour	$L = 180°$,	$V = 72° 21'$.

3°. — Pour obtenir le canevas, on choisit la latitude l_0 du parallèle moyen. Avec le point O comme centre, on trace une circonference C_0 de rayon arbitraire qui vaudra conventionnellement :

$$r_0 = \operatorname{cotg} l_0.$$

Le parallèle moyen occupera donc une portion de la circonférence C_0. Si l'on veut que la carte s'étende de $\pm L$ de part et d'autre du méridien origine dont l'image OO′ est rectiligne, on mène par le point O, de part et d'autre de OO′, deux droites faisant avec OO′ l'angle (évidemment indépendant de l'échelle) :

$$\alpha = \mathrm{L} \sin l_0.$$

On délimite ainsi sur la circonférence C_0 un arc de longueur :

$$2\alpha r = 2 \mathrm{L} \sin l_0 \operatorname{cotg} l_0 = 2 \mathrm{L} \cos l_0,$$

précisément égal à l'arc du parallèle moyen à représenter.

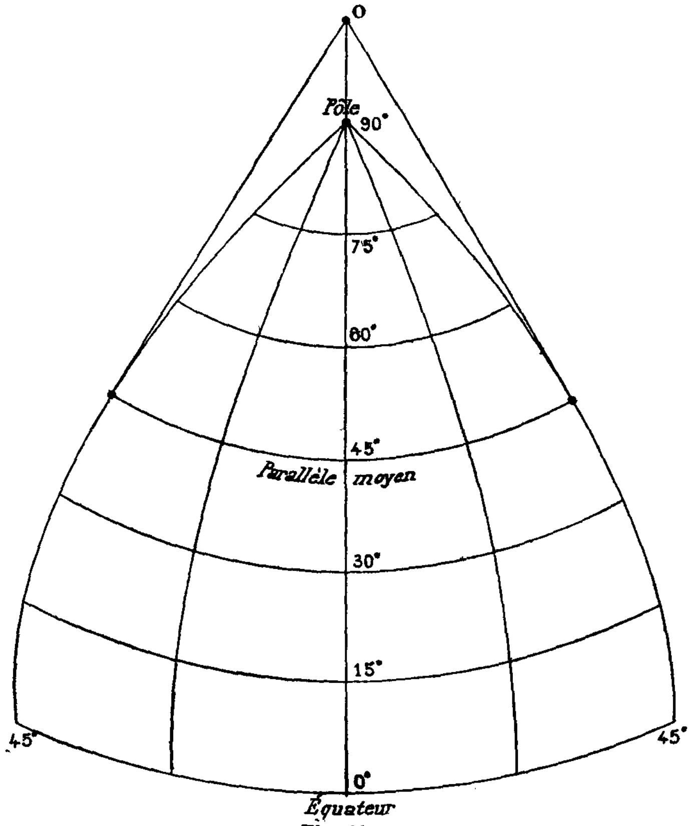


Fig. 110.

Pour tracer la circonférence C dont une portion est l'image du parallèle l, il faut prendre $\overline{\mathrm{MN}} = l - l_0$.

Mais $l - l_0$ est évalué en radian, conventionnellement $\overline{\mathrm{OM}}$ représente $\operatorname{cotg} l_0$.

Par exemple, soit $l_0 = 48°$, $\operatorname{cotg} l_0 = 0{,}900$.

L'arc d'un degré vaut en radian 0,01745.

Le cercle C qui correspond à $l = 58°$, c'est-à-dire tel que

$$l - l_0 = 10°,$$

est défini par les conditions : $\overline{\mathrm{NM}} = 0{,}1745, \qquad \overline{\mathrm{OM}} = 0{,}900.$

La latitude du pôle est supérieure à l_0 de 42°; on a donc :

$$\overline{PM}=0{,}01745\times 42=0{,}733, \qquad \overline{OP}=\overline{OM}-\overline{PM}=0{,}167.$$

131. Projection de Bonne en tenant compte de l'aplatissement.

Soit l_0 la latitude choisie pour le parallèle moyen; M est le *point central* de la carte. Traçons une droite MO; elle représentera le *méridien principal* PMA.

Nous prendrons, comme précédemment, MO égal à la longueur de la tangente menée à l'ellipsoïde, du point M jusqu'à sa rencontre avec l'axe de révolution PO.

Soit N la *grande normale* au point M (§ 140);

on a : $\qquad r_0=\overline{MO}=N\cot g\, l_0, \qquad N=a:\sqrt{1-e^2\sin^2 l_0}.$

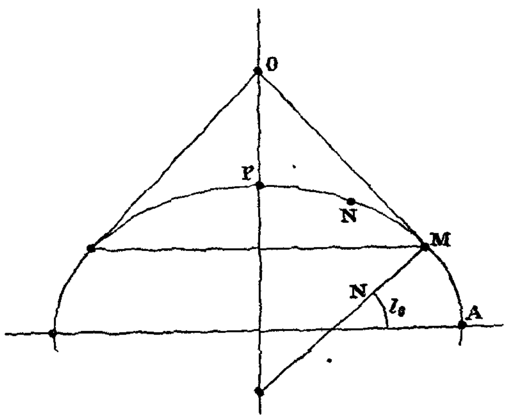


Fig. 111.

Les images des parallèles sont des arcs de circonférences concentriques, de centre O. Pour déterminer le rayon du parallèle l, prenons à partir du point M une longueur s égale à l'arc de méridien compris sur l'ellipsoïde entre les parallèles de latitudes l_0 et l.

La longueur s est calculée au § 140.

Reste à tracer les *images* des méridiennes. D'après la définition même de la projection, elles doivent limiter sur les parallèles de la carte des arcs égaux aux vraies grandeurs des parallèles sur l'ellipsoïde.

Le parallèle de latitude l a pour vraie grandeur (§ 140) :

$$2\pi a\cos l:\sqrt{1-e^2\sin^2 l}=2\pi a\cos l\left(1+\frac{e^2}{2}\sin^2 l\right).$$

On calcule l'angle α qui correspond sur un parallèle à la longitude choisie en écrivant :

$$\alpha r=\mathrm{L}\, a\cos l:\sqrt{1-e^2\sin^2 l}.$$

r est le rayon du parallèle sur la carte.

En raison de l'allongement des degrés du parallèle quand on va vers le pôle, le canevas prend l'allure singulière que représente la figure 112. Le point P se trouvant repoussé vers le haut, les méridiens des grandes longitudes sont concaves vers le haut au voisinage du pôle. Le parallèle moyen de la figure 112 est de latitude 45°.

Je laisse au lecteur le soin de calculer quels angles font sur la carte les méridiens et les parallèles.

N'oublions pas que, dans la carte de France, la projection ne sert qu'à 7 ou 8° du point central; les altérations angulaires et linéaires sont très faibles, absolument négligeables vu les erreurs inévitables dans la détermination de la position des points sur le terrain.

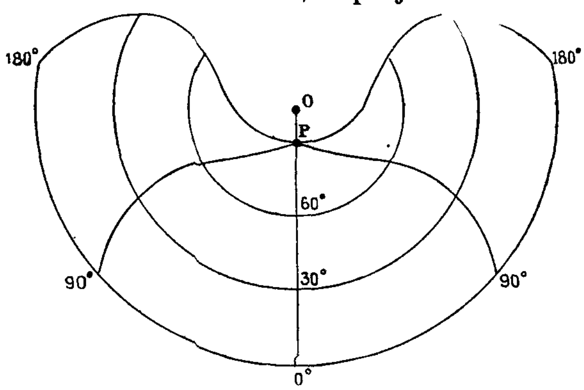


Fig. 112.

La carte de France du Dépôt de la guerre (*carte de l'état-major*) est vendue au 1 : 80.000. Elle se compose de 259 feuilles et présente une superficie de 82 mètres carrés. On la trouve dans le commerce au 1 : 50.000; le kilomètre vaut alors 2 cm.

Les *minutes* sont au 1 : 40.000.

Pour ces deux cartes, la surface est donc d'environ 210 m² et 330 m².

132. Projection de Werner. Projection polyconique.

1°. — C'est un cas particulier de la projection de Bonne; on pose

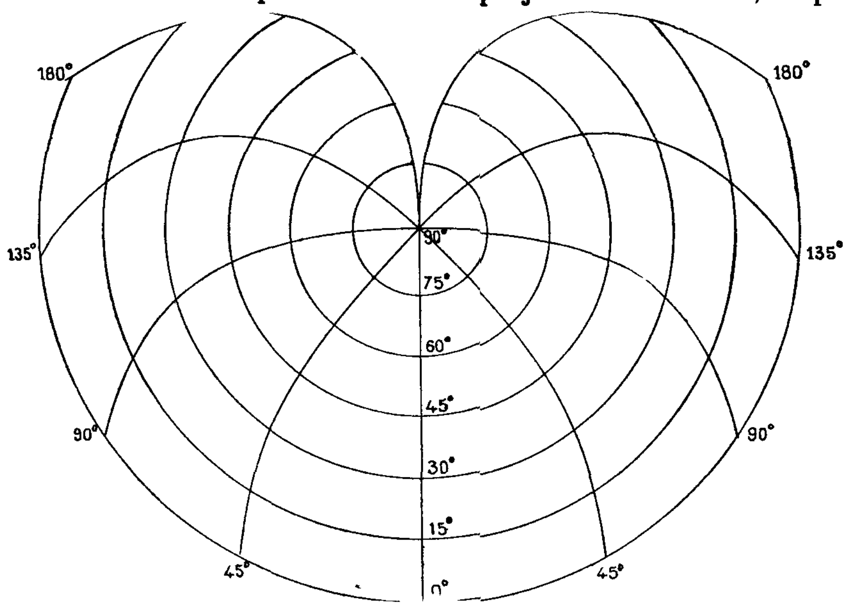


Fig. 113.

$l_0 = \pi : 2$, ce qui revient à prendre pour parallèle moyen un cercle infiniment petit. Les équations deviennent :

$$\alpha = 2L\frac{\cos l}{\pi - 2l}, \qquad r = \frac{\pi}{2} - l, \qquad \alpha r = L\cos l.$$

Pour l très voisin de $\pi:2$, α prend la forme $0:0$.
Mais écrivons :

$$\alpha = L\sin\left(\frac{\pi}{2} - l\right) : \left(\frac{\pi}{2} - l\right).$$

Lorsque l tend vers $\pi:2$, α tend vers L.
Donc les courbes images des méridiennes vont toutes passer par l'origine ($r=0$, pour $l=\pi:2$); les tangentes de départ font l'angle L avec l'image rectiligne du méridien moyen.
2°. — Pour fixer les idées, soit à représenter un hémisphère.
Traçons les courbes qui limitent la carte :

$$\alpha = 2\pi\frac{\cos l}{\pi - 2l}, \qquad r = \frac{\pi}{2} - l.$$

l	r	α	α
90°	0	3,14	180°
75	0,262	3,10	178°
60	0,524	3,00	172
45	0,785	2,82	162
30	1,047	2,60	149
15	1,309	2,31	132
0	1,571	2,00	115

Pour $l = -90°$, toutes les courbes passent par le point unique :

$$\alpha = 0, \qquad r = \pi,$$

Elles y arrivent de manière à former une sorte de cœur, en faisant avec le méridien principal des angles V définis par l'équation :

$$-\operatorname{tg} V = L.$$

On peut généraliser la projection de Werner en posant :

$$\alpha = 2kL\frac{\cos l}{\pi - 2l}, \qquad r = \frac{\pi}{2} - l.$$

3°. — PROJECTION POLYCONIQUE ORDINAIRE.
Tout en conservant la relation caractéristique de la projection de Bonne :

$$\alpha r = L\cos l,$$

on peut prendre pour r telle fonction de l qu'on voudra.
On a proposé (fig. 114) :

$$r = \operatorname{cotg} l, \qquad \alpha = L\sin l.$$

L'image de la méridienne L part de l'origine O des coordonnées sous l'angle $\alpha = L$. Elle admet une asymptote parallèle au méridien principal et distante de L de ce méridien ; on a en effet :

$$l = 0, \qquad r = \infty, \qquad \alpha r = L.$$

Le canevas a la forme singulière représentée par la figure 114.

Il ne peut évidemment servir que pour moins d'un hémisphère, puisque $r = \infty$ pour $l = 0$.

On appelle cette projection polyconique parce que les rayons r des

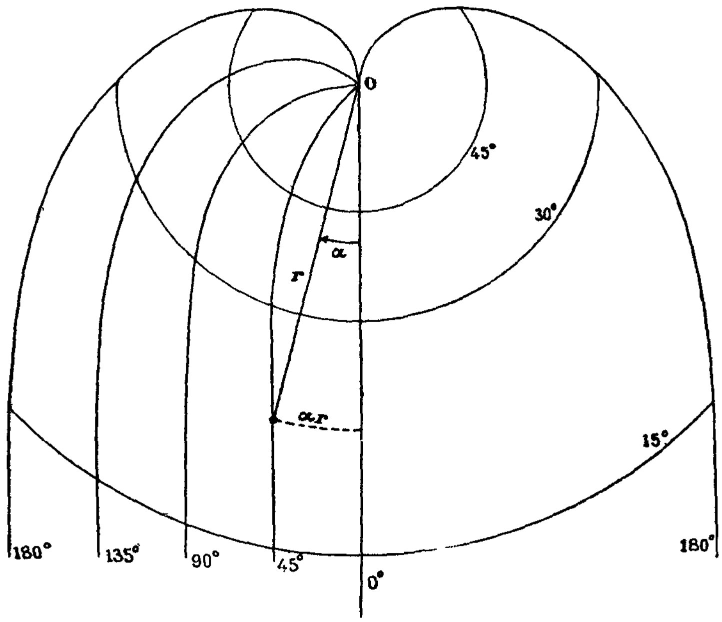


Fig. 114.

parallèles sur la carte sont égaux aux génératrices des cônes tangents suivant ces parallèles.

Canevas formés de circonférences non concentriques et de courbes diverses.

133. Projection polyconique à parallèles circulaires non concentriques.

Les Américains utilisent des projections dont les parallèles sont circulaires et de rayons : $r = \operatorname{cotg} l$.

Mais les centres sont placés de manière que sur le méridien principal les distances des cercles soient proportionnelles aux variations de la latitude. La longueur OP représentative du méridien principal est $\pi : 2 = 1{,}57$. Les images des parallèles des grandes latitudes sont quasiment des circonférences concentriques.

Le faisceau des parallèles est ainsi complètement défini.

Reste à choisir les courbes représentatives des méridiens.

Voici deux procédés.

1°. — Projection polyconique rectangulaire.

On impose la condition que le faisceau des méridiens soit orthogonal au faisceau des parallèles.

Cherchons l'équation d'un méridien.

On a : $\overline{AA'} = dl, \qquad dr = d.\,\mathrm{cotg}\, l = -\dfrac{dl}{\sin^2 l}$

$$\overline{CC'} = \overline{CA} - (\overline{C'A'} + \overline{AA'}) = -dr - \overline{AA'} = dl\left(\frac{1}{\sin^2 l} - 1\right) = dl\,\mathrm{cotg}^2 l.$$

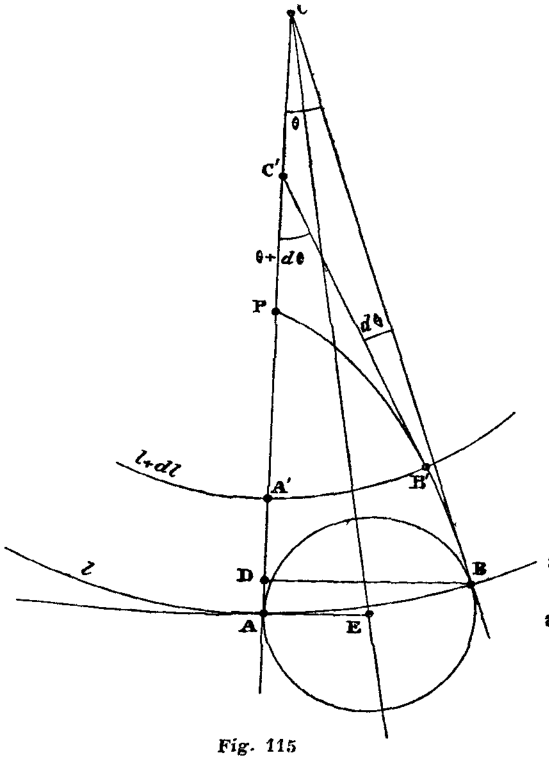


Fig. 115

Dans le triangle CC'B', on a : $\dfrac{\overline{CC'}}{d\theta} = \dfrac{r}{\sin\theta}$,

$$dl.\mathrm{cotg}^2 l = \frac{d\theta}{\sin\theta}\mathrm{cotg}\, l.$$

Les équations différentielle et finie de la courbe cherchée sont donc :

$$dl.\ \mathrm{cotg}\, l = \frac{d\theta}{\sin\theta},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{K}\sin l.$$

Déterminons la constante d'intégration de manière que les méridiens coupent l'équateur à des distances du méridien principal précisément égales à leur longitude.

La distance du point B au méridien principal est :

$$\begin{aligned} \delta &= \overline{BD} = r\sin\theta \\ &= \mathrm{cotg}\, l.\sin\theta \\ &= 2\,\mathrm{K}\frac{\cos l}{1 + \mathrm{K}^2\sin^2 l}. \end{aligned}$$

Pour $l = 0$, on doit avoir $\delta = \mathrm{L}$; d'où : $\mathrm{K} = \mathrm{L} : 2$.

En définitive l'équation des courbes cherchées est :

$$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{L}}{2}\sin l.$$

Pour construire sur le parallèle AB le point B qui correspond à la longitude L, traçons la tangente en A.

Prenons dessus la longueur $\overline{AE}$ telle que :

$$2\,\overline{AE} = \mathrm{L}\cos l.$$

Décrivons le cercle de rayon $\overline{AE}$ et de centre E; il coupe le parallèle au point cherché. On a en effet :

$$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CA}} = \frac{\mathrm{L}\cos l}{r} = \frac{\mathrm{L}}{2}\sin l.$$

Au pôle ($\sin l = 1$), on a :

$$\operatorname{tg}(\theta : 2) = L : 2.$$

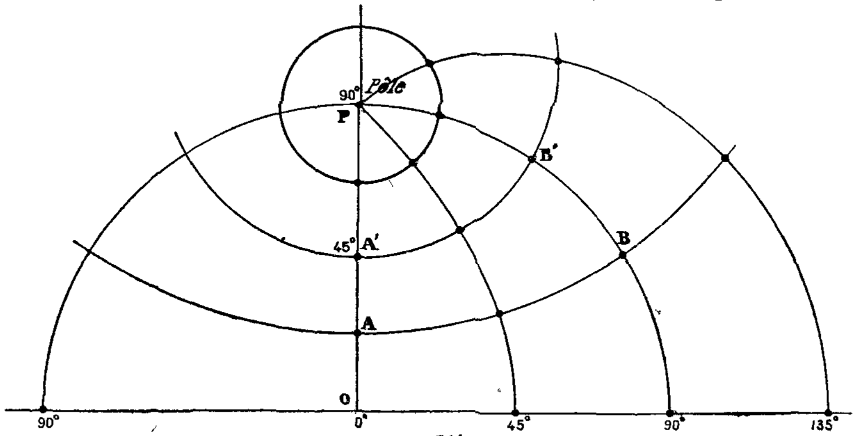
Les méridiens ne font pas avec le méridien principal des angles égaux ni proportionnels à leurs longitudes. En particulier, on a :

$$L = \pi : 2, \quad \theta = 76^\circ\, 16'; \quad L = \pi, \quad \theta = 113^\circ\, 2'.$$

La forme générale du canevas étant (à cela près) analogue à celui de la figure 110, je ne le représente pas.

2°. — Autre projection.

Elle est extrêmement simple à construire et bien suffisante pour des cartes à petite échelle. Avec OP comme rayon et O pour centre,



116.

traçons un cercle : il limitera la portion de carte relative à l'hémisphère de centre O (méridien $\pm 90^\circ$). Pour obtenir les autres méridiens, divisons les parallèles AB, A′B′,... en parties égales; joignons les points de même cote.

J'ai ainsi tracé les méridiens de longitudes 45° et 135° est.

Rien n'empêche de représenter la sphère entière.

Les méridiens partent du pôle en faisant avec le méridien principal un angle égal à la longitude qui leur sert de cote. Cela tient à ce qu'au voisinage du pôle, les parallèles sont des cercles concentriques.

134. Projection stéréographique horizontale et oblique.

1°. — Nous connaissons les propriétés de la projection stéréographique (§ 117), projection sur le plan tangent en un point A de la sphère, le point de vue étant à l'autre bout B du diamètre de tangence. Les cercles de la sphère étant transformés en des cercles, les images des parallèles et des méridiennes sont des cercles, *où qu'on mette le point de tangence.*

La projection stéréographique est dite *horizontale* quand le plan tangent est parallèle à la ligne des pôles, par suite quand le point de vue est dans l'équateur (fig. 117).

Cherchons les formules de transformation.

Supposons le point de vue en V à une distance $\overline{OV} = D$ du centre de la sphère. Les coordonnées cartésiennes du point Q sont :

$$X = \cos l.\sin L, \qquad Y = \sin l, \qquad Z = \cos l.\cos L.$$

Les coordonnées du point V sont : $0, \quad 0, \quad -D$.

Menons la droite VQ ; cherchons les coordonnées x, y, du point R où elle coupe le tableau. On trouve immédiatement :

$$x = (1 + D)\frac{\cos l.\ \sin L}{D + \cos l.\cos L}, \qquad y = (1 + D)\frac{\sin l}{D + \cos l.\cos L}.$$

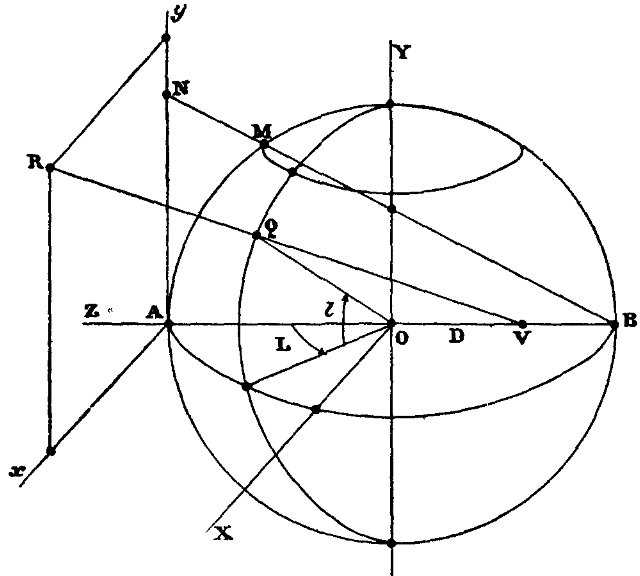


Fig. 117.

Pour la projection stéréographique horizontale, on a :

$$D = 1, \qquad x = \frac{2\cos l.\sin L}{1 + \cos l.\cos L}, \qquad y = \frac{2\sin l}{1 + \cos l.\cos L}.$$

2°. — Images des méridiennes.

Elles forment un faisceau de cercles qui passent évidemment par les images des pôles de coordonnées $0, \quad \pm 2$.

Les coordonnées de l'image d'un point de l'équateur sont :

$$l = 0, \qquad y = 0, \qquad x = \frac{2\sin L}{1 + \cos L}.$$

D'où l'équation des cercles et leur construction :

$$x^2 + y^2 + 4\,\mathrm{cotg}\,L.x - 4 = 0.$$

3°. — Images des parallèles.

Les coordonnées de l'image d'un point du méridien YA sont :

$$x = 0, \qquad y = \frac{2\sin l}{1 + \cos l}.$$

Les cercles cherchés passent par ces points. De la conservation des angles résulte qu'ils sont normaux à l'image du grand cercle de la sphère dont le plan est YOX, image dont l'équation est :

$$x^2+y^2=4.$$

D'où aisément pour les images des parallèles :

$$x^2+y^2-\frac{4y}{\sin l}+4=0.$$

En particulier, pour $l=0$, il faut poser $y=0$: l'image de l'équateur est un segment de droite, diamètre horizontal du cercle :

$$x^2+y^2=4.$$

Pour $l=\pm 90°$, l'équation devient :

$$x^2+(y\mp 2)^2=0;$$

elle est satisfaite par $x=0$, $y=\pm 2$: les parallèles se confondent avec le pôle.

D'habitude on se contente d'une construction graphique qui donne le point N le plus bas du cercle image du parallèle M.

Il est normal au cercle

$$x^2+y^2=4.$$

L'y de son centre satisfait donc à la relation :

$$y^2=4+R^2,$$

où R est son rayon.

D'où l'équation :

$$(\overline{AN}+R)^2=4+R^2,$$

$$R=\frac{4-\overline{AN}^2}{2\overline{AN}}.$$

On sait que le centre du cercle cherché est sur Ay; on connaît un des points N où il coupe Ay; on a son rayon R.

On peut donc le tracer.

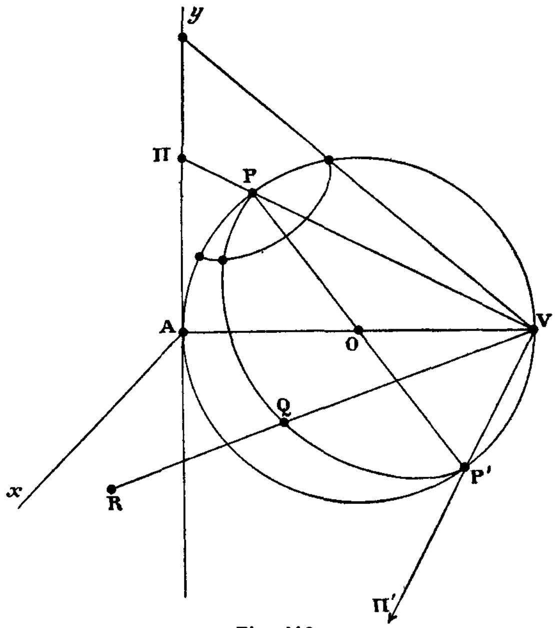


Fig. 118.

4°. — Projection stéréographique oblique.

C'est le même système de projection, mais le tableau est tangent à la sphère en un point A quelconque. Les propriétés générales de la transformation restent inchangées; en particulier les cercles tracés sur la sphère ont des cercles pour images.

Les images des méridiennes passent par deux points fixes Π et Π' sur l'axe Ay; ce sont les images des pôles P et P'. Les images des parallèles ont leurs centres sur Ay. On les construit aisément.

135. Projection globulaire de Nicolisi. Projection du Père Fournier.

1° — Images circulaires des parallèles.

Les images des parallèles sont définies comme suit.

L'équateur a pour image la droite EE'. Nous poserons $\overline{EE'}=\pi$.

Le parallèle de latitude l a pour image une circonférence telle qu'on ait :

$$y=\overline{OM}=l, \qquad \text{arc } \overline{EN}=\frac{l\pi}{2}.$$

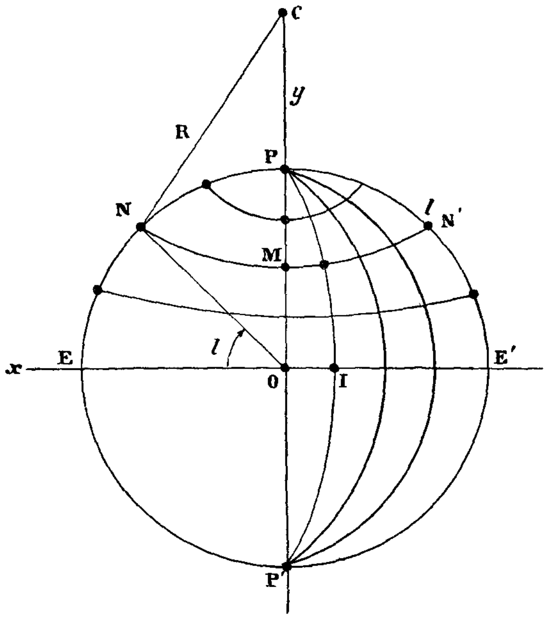


Fig. 119.

Les distances interceptées sur la droite PP' et sur le cercle PEP'E' sont proportionnelles aux latitudes.

Déterminons le centre C du cercle et calculons son rayon R ; l'échelle est donnée par la longueur $\overline{EE'}=\pi$.

Posons $\overline{OC}=\Delta$.

Nous avons : $\Delta-R=l$,

$$R^2=\Delta^2+\frac{\pi^2}{4}-\Delta\pi\sin l$$

D'où : $$\Delta=\frac{\pi^2-4l^2}{4\pi\sin l-8l},$$

$$R=\Delta-l.$$

Ces formules résolvent le problème.

2°. — Projection globulaire. Images circulaires des méridiens.

Pour parfaire le canevas, il faut donner les images des méridiennes. La *projection globulaire* prend pour image des méridiennes des circonférences passant par P et P', et coupant la droite EE' de manière que : $$\overline{OI}=L.$$

Le canevas est ainsi complètement déterminé.

Nous avons déjà rencontré ces cercles au § 126.

3°. — Projection du P. Fournier.

Les images des méridiennes sont des ellipses de grand axe PP' et coupant EE' de manière que $\overline{OI}=L$:

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{2y}{\pi}\right)^2=1.$$

136. Projection de Littrow.

En coordonnées cartésiennes elle est définie par les équations :

$$x=\frac{\sin L}{\cos l}, \qquad y=\operatorname{tg} l.\cos L. \qquad (1)$$

Les parallèles ont pour images les ellipses :

$$\frac{y^2}{\sin^2 l}+x^2=\frac{1}{\cos^2 l} \tag{2}$$

L'équateur a pour image l'axe des x ($y=0$).
Les méridiennes ont pour images les hyperboles :

$$\frac{x^2}{\sin^2 L}-\frac{y^2}{\cos^2 L}=1. \tag{3}$$

Le méridien principal $L=0$ a pour image l'axe des y ($x=0$).

Les coniques (2) et (3) sont homofocales; elles se coupent à angles droits : *la projection conserve les angles.*

137. Remarques sur les déformations et l'emploi des cartes.

1°. — Quelques réflexions sur les déformations ne sont pas inutiles. On parle de conserver les angles ou de conserver les surfaces : c'est fort bien, mais on ne parle jamais de l'aspect que prennent les méridiens et les parallèles, et des idées singulières qui en dérivent. Par exemple, peu de personnes ont une idée exacte de la disposition relative des pays limitrophes de la France. Vous les étonnez en leur disant que le pays le plus occidental d'Europe est non pas le Portugal avec Lisbonne, mais l'Irlande. Que Londres soit au-dessus du Mans, que la latitude du nord de l'Ecosse soit celle du sud de la Norvège, les ahurit. Et ainsi de suite.

Les raisons de ces incohérences sont faciles à démêler. Pour cause, les professeurs de géographie se gardent d'insister sur le système des repères (coordonnées géographiques), sur la valeur du degré de méridien, et sur celle du degré sur un parallèle à diverses hauteurs. A la vérité, ils ne sauteraient pas une sous-préfecture, ni (c'est la mode aujourd'hui) un fossile; mais ils glissent *prudemment* sur ce qui constitue l'ossature de la cartographie. Il est moins dangereux de bafouiller sur les terrains, que sur les latitudes et longitudes, où l'on peut être ramassé par un élève intelligent.

C'est toujours la même rengaine. En Chimie les élèves ne savent pas un mot des notations; il est naturel qu'en Géographie ils ignorent tout des systèmes de représentation.

Aussi bien je ne réclame pas que, sous prétexte de *Science,* on leur débite ni surtout qu'on leur dicte les âneries qui ornent les atlas les plus réputés; je suis plus modeste, parce que je connais la question.

Peu importe la forme des méridiens et des parallèles et leurs équations sur la carte, si les élèves connaissent bien les définitions sur la sphère, s'ils savent lire la carte, c'est-à-dire se rendre compte des situations et des distances d'après les longitudes et les latitudes.

2°. — Pour juger la sottise de nos cartographes classiques, ouvrez l'atlas Schrader. Vous y trouverez des nombres à foison; vous n'y trouverez pas la longueur des degrés de parallèles à diverses latitudes.

Je ne réclame pas le tableau du § 143 qui tient compte de l'aplatissement. Qu'on le réduise autant qu'on voudra.

Tout de même est-ce trop exiger de nos géographes qui bafouillent sur les terrains et les fossiles, de savoir ce qu'est un cosinus, de comprendre que pour obtenir la longueur du degré de longitude sur un parallèle de latitude l, il faut multiplier 111 kilomètres ou 60 milles marins par $\cos l$?

Si dès le début on s'attachait par des calculs élémentaires à retrouver la distance des points d'après la position sur une carte, à calculer approximativement les aires,... *bref à considérer une carte comme un outil et les méridiens et parallèles comme des repères commodes de sens bien définis,* les enfants n'auraient pas les idées les plus étranges sur la disposition relative des pays.

Si l'on plantait là l'histoire de la Géographie et autres fichaises, si le temps gagné était employé à faire un peu de cartographie, nos professeurs de Géographie ne seraient pas si grotesques dans l'emploi de leurs cartes. Encore une fois, je fais bon marché des renseignements stupides donnés (en 4 colonnes) sur 35 systèmes de projection par l'atlas Schrader. Que les méridiens soient représentés par telle ou telle courbe, que les déformations soient plus petites ou plus grandes, c'est notre affaire, à nous autres scientifiques. Je demande que les professeurs de géographie sachent bien les choses élémentaires, soient capables des calculs simples et, au lieu d'apprendre par cœur que « la superficie de l'Europe est de 10.252.169 kilomètres carrés, sans l'Islande », soient capables d'évaluer *grosso modo* cette aire d'après la carte.

Hélas! je leur demande d'être intelligents!

138. Construction des globes.

La représentation sur un globe est d'une précision médiocre, nous allons montrer pourquoi : elle présente au moins l'avantage de ne pas fausser systématiquement les idées des commerçants. Les distances, même les plus grandes, sont représentées en vraie grandeur; les dimensions des pays relativement à la surface totale apparaissent nettement.

Voici quelques renseignements sur leur construction.

1°. — Obtention de la sphère.

Si le diamètre ne dépasse pas 50 cm., la sphère s'obtient en deux morceaux, dans un moule creux sphérique soigneusement tourné. Comme matière on utilise de la pâte de carton, papier qu'on trempe dans l'eau jusqu'à donner une bouillie, puis qu'on assèche par pression. On pétrit la pâte de papier avec de la colle de farine. On en recouvre le moule convenablement graissé; on réalise une épaisseur convenable avec un moule en relief, de rayon de quelques millimètres moindre que le moule en creux. On laisse sécher lentement.

On démoule; on rassemble les hémisphères par collage. On enduit la sphère de blanc pulvérisé et malaxé dans de la colle. On polit par rodage avec un moule en creux.

Si la sphère est très grande, on construit une carcasse avec des lattes de bois très léger et très sec. On tend sur la surface une toile, puis, à la colle de pâte, on colle des épaisseurs successives de papier

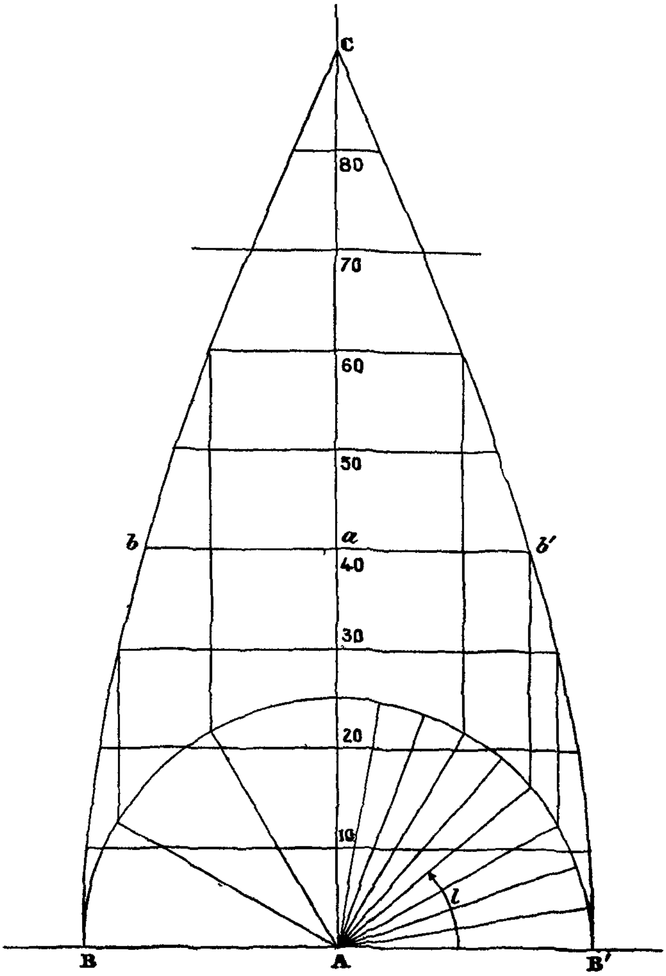


Fig. 119 bis.

jusqu'à réaliser une sphère à peu près régulière. On laisse sécher; on régularise à la rape. On recouvre du mélange de blanc et de colle de pâte, on laisse sécher; on fait subir à la sphère un véritable tournage.

On obtient ainsi des sphères rigides et légères sur lesquelles on colle les fuseaux imprimés.

2°. — Fuseaux.

On peut recouvrir exactement une sphère avec des fuseaux plans, grâce à la propriété du papier de s'allonger par le mouillage, de *prêter* d'une manière notable. Evidemment l'opération n'est possible que si le nombre des fuseaux est assez grand. On les prend ordinairement de 20 ou de 30°, ce qui met leur nombre à 18 ou 12. Pour fixer les idées, soit 20° la largeur choisie.

Sur deux droites rectangulaires, portons les longueurs :

$$\overline{AB} = \overline{AB'} = 2\pi R : 36, \qquad \overline{AC} = 2\pi R : 4;$$

R est le rayon du globe terminé.

Divisons $\overline{AC}$ en 9 parties correspondant chacune à 10° de latitude.

Par les points obtenus menons des parallèles à la droite BB'.

Prenons : $$\overline{ab} = \overline{ab'} = \overline{AB}.\cos l.$$

Nous déterminons ainsi 8 points pour chaque bord, que nous joignons avec une règle flexible (règle courbe des dessinateurs).

Les points s'obtiennent immédiatement par la construction qu'indique la figure 119 *bis*.

On dessine et l'on imprime la carte sur ces demi-fuseaux; on les découpe, on les colle sur le globe en profitant de l'extensibilité du papier mouillé.

Il est impossible de réaliser ainsi quelque chose de propre au voisinage du pôle. Aussi colle-t-on une calotte allant de $l = 70°$ à $l = 90°$; conséquemment on supprime la partie supérieure des demi-fuseaux.

Quand la colle est sèche, on recouvre d'une couche d'un vernis bien transparent.