Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable suivant une loi exponentielle

On considère X une variable aléatoire continue suivant la loi exponentielle de paramètre a. Nous allons calculer son espèrance mathématique et sa variance.

Commençons par rappeler la densité de probabilité de X. C'est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto a\,e^{-ax}$$

```
> f(x):=a*exp(-a*x);
```

```
f(x):=a*EXP((-a)*x);
```

```
> assume(a>0)$
```

Nous savons que l'espèrance de X est le réel, noté $E(X)$ égal à $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$. Nous allons utiliser la méthode d'intégration par parties pour calculer cette intégrale. Nous avons énoncé en cours la propriété.

Le logiciel MAXIMA ne sait pas *mettre en scène* l'intégration par parties, aussi, allons-nous définir au préalable la commande qui présentera le calcul.

```
> ipp(u,v,x) := block([U],
    U:integrate(u,x),
    'integrate(u*v,x)=U*v-'integrate(U*diff(v,x),x)
)$
```

Vous pouvez constater que celà correspond à la formule donnée en cours.

Cette commande nous donnera une primitive de la fonction à intégrer $u\,v$, il faudra ensuite calculer l'intégrale correspondante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

```
> ipp(f(x),x,x);
```

$$a\int x\,e^{-a\,x}\,\mathrm{d}x = \int e^{-a\,x}\,\mathrm{d}x - x\,e^{-a\,x}$$

Il reste à calculer la variation de cette primitive entre 0 et $+\infty$.

```
> integrate(exp(-a*x),x,0,inf)+limit(x*exp(-a*x),x,inf)-limit(x*exp(-a*x),x,0);
```

$$\frac{1}{a}$$

Nous retrouvons donc bien que l'espérance de X est égale à $\frac{1}{a}$.

Remarque – MAXIMA sait calculer directement l'intégrale recherchée.

```
> 'integrate(x*f(x),x,0,inf)=integrate(x*f(x),x,0,inf);
```

$$a\int_0^{\infty} x\,e^{-a\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

Puisque vous avez compris le principe (!!), je vous propose de la même manière de calculer la variance de X.

Rappel : $Var(X) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (E(X))^2$.