Olympiades de mathématiques du 9 mai 2001

Indications pour les exercices proposés à titre d'entraînement

Auteurs : *Hassan Tarfaoui* (HT) et *Jean-Michel Sarlat* (JMS)

Exercice 1 – JMS – L'un des nombres x, y ou z est nécessairement plus grand (au sens large) que les autres…

Exercice 2 – JMS – Cela semble bien régulier, à tel point qu'en observant des différences à droite on peut prévoir que sur la quatrième ligne on trouvera 29^2.

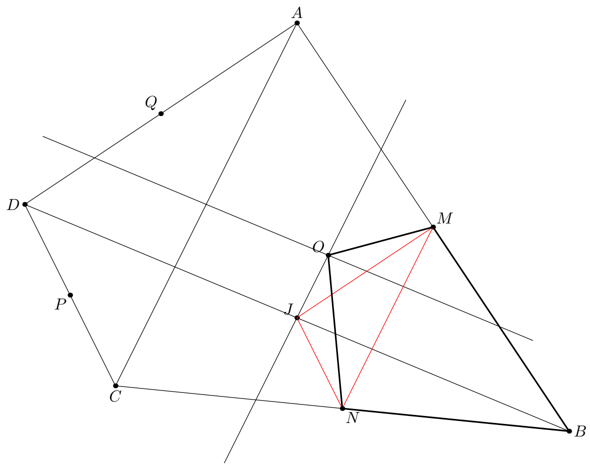
Comme les chose se confirment, formalisons un peu : nommons u_n l'entier à gauche de l'égalité à la ligne n et v_n celui qui est à droite.

On a : $u_n = n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1$. Pour v_n, il faut conjecturer une écriture simple en fonction de n. Il reste alors à vérifier l'égalité pour tout n, en développant les expressions obtenues par exemple.

Exercice 3 – JMS – Il faut se faire la main sur des inégalités du même type, avec un second membre plus petit, permettant du moins une représentation. La réponse correspond au dénombrement des points à coordonnées entières qui s'inscrivent dans un losange …ou un carré. Cela dépend de la façon de « voir » l'ensemble des solutions et cela procure en fait deux méthodes de dénombrement !

Exercice 4 – JMS – Considérons pour commencer le quadrilatère $OMBN$, il est convexe (à établir !) et se décompose en deux triangles : OMN et MNB. Pour une raison simple, l'aire de MNB est égale au quart de celle de ABC. Comparons maintenant les aires des deux triangles OMN et JMN sachant que la droite (OJ) est parallèle à (MN)…

La démonstration s'achève en comparant les aires de JMN et DAC.



Exercice 5 – HT – Il faut résoudre l'équation suivante $x^2 - 10x - 22 - p(x) = 0$ en utilisant le discriminant réduit Δ', puis il faut chercher les valeurs de $p(x)$ pour que Δ' soit un carré parfait sachant que $0 \leqslant p(x) \leqslant 81$ et on achève la démonstration.

Exercice 6 – HT – On note x_i $(i = 1, 2, \dots, 2n+1)$ le nombre de jetons contenus dans le *i-ième* sachet, et $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}$, le nombre total de jetons.

Il faut démontrer que $x_i - x_j$ est pair pour tout indice i et j, déduire de ce qui précède que tous les x_i ont la même parité. Fabriquer une nouvelle partition en posant :

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{x_i}{2} & \text{si tout } x_i \text{ est pair} \\ y_i = \dfrac{x_i - 1}{2} & \text{si tout } x_i \text{ est impair} \end{cases}$$

Conclure.

Exercice 7 – JMS – Faire le choix d'un triangle équilatéral au hasard. Deux possibilités : les trois sommets sont de la même couleur ou deux sont d'une couleur – bleu (B), par exemple – et le troisième de l'autre couleur – rouge (R) –.

Dans ce dernier cas considérer le point milieu des deux sommets ayant la même couleur (B). Deux cas :

– il est bleu alors en considérant les milieux des deux autres côtés, immanquablement il apparaît un triangle équilatéral avec trois sommets de la même couleur ;

– il est rouge alors il faut considérer le point symétrique du sommet rouge par rapport à ce point…

Bien entendu il faut faire un dessin !

Exercice 8 – JMS – Il faut « jouer » ici avec deux types de formules permettant le calcul de l'aire du triangle ABC, constante lorsque C varie sur une droite parallèle à (AB). La première est la formule classique et la seconde celle faisant intervenir le produit de deux côtés et le sinus de l'angle formé. Après quelques manipulation, constater que le produit des hauteurs est maximal lorsque le sinus de l'angle en C est maximal. Il reste à faire une figure pour voir où cette condition semble réalisée et le démontrer ensuite…

Exercice 9 – JMS – Pour la première question, les deux nombres étant positifs, il suffit de comparer leurs carrés. Pour rendre la démonstration plus « fluide », on peut supposer que $|u|$ est inférieur ou égal à $|v|$.

La seconde question exploite plusieurs fois le résultat de la première, dans un premier temps faire $u \leftarrow u_1$, $v \leftarrow u_2$, puis $u \leftarrow u_3$, $v \leftarrow u_4$, mettre de côté ce qui convient puis faire $u \leftarrow u_1 - u_2$ et $v \leftarrow u_3 - u_4$. Terminer avec l'inégalité triangulaire.

Bon courage !