Exercices d'entraînement pour la préparation aux Olympiades de mathématiques du 9 mai 2001

N.B. : Les signes * et ** donnent une indication sur le niveau de la difficulté. Cette estimation ne peut être que personnelle et subjective.

Exercice 1
L'équation $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, a un ensemble de solutions qui est a) infini ? b) vide ? c) réduit à un élément ?

Exercice 2
Observer, continuer, généraliser :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 4 & + & 1 & = & 5^2 \\
2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & 5 & + & 1 & = & 11^2 \\
3 & \times & 4 & \times & 5 & \times & 6 & + & 1 & = & 19^2
\end{array}$$

Existe-t-il une ligne sur laquelle on trouve 2001^2 ?

Exercice 3
Combien existe-t-il de couples (x, y) d'entiers relatifs tels que : $|x| + |y| \leqslant 1000$?

Exercice 4*
Soit un quadrilatère convexe $ABCD$.
La parallèle à (BD) passant par le milieu I de la diagonale $[AC]$ et la parallèle à (AC) passant par le milieu J de la diagonale $[BD]$ se coupent en O.
Démontrer que les 4 segments joignant le point O aux milieux M, N, P, Q des 4 côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ partagent le quadrilatère $ABCD$ en 4 quadrilatères de même aire.

Exercice 5**
Un certain nombre de jetons sont répartis dans $2n + 1$ sachets. Supposons que, en retirant l'un quelconque de ces sachets, il soit possible de répartir le reste en deux groupes de n sachets, de telle sorte que chaque groupe contienne le même nombre total de jetons. Démontrer que chaque sachet contient le même nombre de jetons.

Exercice 6
Soit x un entier naturel, on pose $p(x)$ le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que :

$$x^2 - 10x - 22 = p(x)$$

Exercice 7*
On affecte à chaque point du plan une couleur : rouge ou bleu.
Montrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral dont les trois sommets sont de la même couleur.
On a affecte à chaque point du plan une couleur : rouge ou bleu.
Montrer qu'il existe un rectangle dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 8*
On considère un triangle ABC dont la hauteur issue de C mesure h. Quelle est la valeur maximale atteinte par le produit des hauteurs lorsque C décrit une droite parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 9** (Concours général 1986)

1/ u et v étant deux réels, montrer $|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$

2/ u_1, u_2, u_3, u_4 étant 4 réels, montrer que :

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4| \leqslant |u_1+u_2|+|u_3+u_4|+|u_1+u_3|+|u_2+u_4|+|u_1+u_4|+|u_2+u_3|$$

(En fait, dans l'énoncé original on se plaçait dans **C**)