PGCD et Division Euclidienne

(★ ★ ★ ★ ★)

Exemple Effectue la division euclidienne de 434 par 126.

$$434 = 126 \times \ldots + \ldots$$

Soit d le PGCD$(434;126)$ donc $434 = d \times n$ et $126 = d \times m$ avec n et m deux nombres entiers.
Est-ce que d divise 56 ?
$56 = 434 - 3 \times 126 = \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots \times \ldots\ldots$ donc ....
....

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } 56 \\ d \text{ divise } 126 \end{array}\right\} \text{Donc } d \text{ est un diviseur commun de 126 et 56.}$$

Est-ce le plus grand ? Soit ℓ le PGCD$(126;56)$. Alors $d \leqslant \ell$ et $126 = \ell \times n$ et $56 = \ell \times m$.
On obtient

$$434 = 126 \times 3 + 56 = \ell \times n \times 3 + \ell \times m = \ell \times (3n + m)$$

ℓ est donc un diviseur commun à 434 et 126 donc $\ell \leqslant d$.
d est donc le PGCD$(126;56)$.

Théorie Soit $(q;r)$ le couple obtenu par la division euclidienne de a par b.

$$a = b \times q + r$$

Soit d le PGCD$(a;b)$ donc $a = d \times n$ et $b = d \times m$ avec n et m deux nombres entiers.
$r = a - b \times q = \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \times \ldots\ldots\ldots$ donc d divise r.

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } r \\ d \text{ divise } b \end{array}\right\} \text{Donc } d \text{ est un diviseur commun à } b \text{ et } r.$$

Est-ce le plus grand ? Soit ℓ le PGCD$(b;r)$. Alors $d \leqslant \ell$ et $b = \ell \times b_1$ et $r = \ell \times r_1$.
On obtient alors que

$$a = b \times q + r = \ell \times b_1 \times q + \ell \times r_1 = \ell \times (b_1 \times q + r_1)$$

ℓ est donc un diviseur commun de a et b et $\ell \leqslant d$. Donc d est le PGCD$(b;r)$.

Pratique Comment faire, avec cette propriété, pour trouver le PGCD$(548,124)$?