PROPRIÉTÉ DU PGCD DE DEUX NOMBRES ENTIERS.

(★ ★ ★ ★ ★)

Dans toute cette activité, a et b sont deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

Diviseurs et opérations

1/ (a) Donne un diviseur d (différent de 1) commun à 45 et à 35.

(b) d est-il un diviseur de $45+35$? de $45-35$?

2/ Supposons que 2 soit un diviseur de a alors $a = 2 \times n$ avec n un nombre entier.

Supposons que 2 soit un diviseur de b alors $b = 2 \times m$ avec m un nombre entier.

Alors

$a+b = \ldots \times n + \ldots \times m = \ldots \times \ldots\ldots$ d'où 2 est un diviseur de ....

$a-b = \ldots \times n - \ldots \times m = \ldots \times \ldots\ldots$ d'où 2 est un diviseur de ....

3/ Si 5 est un diviseur commun à a et b, prouve que 5 est aussi un diviseur de $a-b$.

5 est un diviseur de ... alors $\ldots = 5 \times \ldots$ avec n un nombre entier.

5 est ....

Donc $a-b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \times \ldots\ldots$ d'où ....

Théorie Si k est un diviseur commun de a et de b alors $a = k \times a'$ et $b = k \times b'$ avec a' et b' des nombres entiers.

Donc $a-b =$ ....

d'où k est un diviseur de $a-b$.

Application Soit $k = \text{PGCD}(a,b)$. Donc

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ divise } a-b \\ k \text{ divise } b \end{array}\right\} \text{Donc } k \text{ est un diviseur commun à } b \text{ et } a-b.$$

Est-ce le plus grand ? Soit ℓ le PGCD$(b;a-b)$. Alors $k \leqslant \ell$ et $b = \ell \times b_1$ et $a-b = \ell \times c_1$.

On obtient alors que

$$a = a-b+b = \ell \times c_1 + \ell \times b_1 = \ell \times (c_1 + b_1)$$

ℓ est donc un diviseur commun de a et b et $\ell \leqslant k$. Donc k est le PGCD$(b;a-b)$.

Pratique Comment faire, avec cette méthode, pour trouver le PGCD$(254,76)$?